



**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО  
ПОДВИЖНОГО СОСТАВА (ГРУЗОВОЙ ПОЕЗД)  
MATHEMATICAL MODEL OF A RAILWAY ROLLING STOCK (FREIGHT  
TRAIN)**

**Черняева Татьяна Николаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математика», ФГБОУ ВО ИрГУПС, г. Иркутск

**Кудашева Лилия Александровна**, студент, ФГБОУ ВО ИрГУПС, г. Иркутск

**Chernyaeva T.N.** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics Irkutsk State Transport University (IrGUPS), cheth2021@yandex.ru

**Kudasheva L.A.** student of Irkutsk State Transport University (IrGUPS), kudashevaliliiia2003@gmail.com

**Аннотация**

В статье рассматривается математическая модель железнодорожного подвижного состава (преимущественно, грузового поезда). Движение подвижного состава по рельсам (процесс управления, торможение, выход в кривые участки пути и др.) изучается такой наукой, как динамика подвижного состава. Для этого используются математические модели, которые представляют собой системы уравнений, связывающих различные параметры

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

подвижного состава. Математическая модель - это упрощенное описание реального явления или системы с использованием математических формул, уравнений и операций. С помощью этой системы можно в ускоренном режиме получить необходимую информацию о грузовом поезде.

### **Abstract**

The article deals with the mathematical model of the railway rolling stock (mainly, freight train). The movement of rolling stock on rails (control process, braking, entering curves, etc.) is studied by such a science as rolling stock dynamics. For this purpose, mathematical models are used, which are systems of equations linking various parameters of the rolling stock. A mathematical model is a simplified description of a real phenomenon or system using mathematical formulas, equations and operations. With the help of this system, it is possible to obtain the necessary information about a freight train in an accelerated mode.

**Ключевые слова:** Математическая модель, железнодорожный подвижной состав, грузовой поезд, математическая модель грузового поезда.

**Keywords:** Mathematical model, railroad rolling stock, freight train, freight train mathematical model.

Железнодорожный подвижной состав — это рельсовые транспортные средства, предназначенные для обеспечения железнодорожных грузовых и пассажирских перевозок и функционирования железнодорожной инфраструктуры. Подвижной состав включает в себя локомотивы, грузовые вагоны, пассажирские вагоны локомотивной тяги, моторвагонный подвижной состав, а также различный специальный подвижной состав. Железнодорожный подвижной состав играет важную роль в развитии экономики, социальной сферы и экологии нашей страны.

С точки зрения экономики, обеспечивается эффективная и надежная перевозка больших объемов грузов по сравнительно низкой цене. Железнодорожный транспорт способствует развитию промышленности, сельского хозяйства, торговли и туризма. Железнодорожный подвижной состав

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

также создает рабочие места и доходы для многих людей, связанных с его производством, эксплуатацией и обслуживанием.

С точки зрения социальной сферы, гарантируется комфортное и доступное путешествие для миллионов пассажиров. Железнодорожный транспорт способствует объединению разных регионов, культур и народов. Также оказывается существенное влияние на образование, науку, искусство и историю.

С точки зрения экологии, железнодорожный подвижной состав оказывает меньшее воздействие на окружающую среду, чем автомобильный транспорт. Данный вид транспорта потребляет меньше энергии, выбрасывает меньше загрязняющих веществ в атмосферу и шумит меньше. Железнодорожный транспорт также способствует сохранению природных ландшафтов, так как требует меньше земли для своей инфраструктуры, чем, к примеру, автомобиль. Он также использует возобновляемые источники энергии, такие как электричество и водород. Однако железнодорожный подвижной состав имеет некоторые негативные аспекты для экологии. Может нарушиться биоразнообразие, что приведёт к возникновению барьеров для миграции животных и растений. Железнодорожный транспорт также может вызывать эрозию почвы, загрязнение воды отработанными маслами, топливом и отходами. Также может стать источником аварий и катастроф, которые могут привести к серьезным экологическим последствиям.

Математическая модель железнодорожного подвижного состава — это совокупность математических уравнений, описывающих поведение подвижного состава в различных режимах движения, взаимодействие с путевой конструкцией, тяговыми и тормозными устройствами, а также влияние различных факторов на безопасность и эффективность эксплуатации. Математические модели также учитывают взаимодействие подвижного состава с путевой конструкцией, которая состоит из рельсов, шпал, брусьев, грунта и других элементов. Путевая конструкция имеет свою жесткость, которая зависит от расстояния между шпалами и других факторов. Жесткость пути влияет на то,

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

как подвижной состав преодолевает неровности и колеблется в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Математическая модель железнодорожного подвижного состава может быть использована для решения различных задач, таких как:

- оптимизация параметров подвижного состава и пути для повышения скорости, уменьшения расхода энергии и износа колес и рельсов;

- анализ динамических нагрузок на подвижной состав и путь при прохождении кривых, переездов, стыков, неровностей и других неоднородностей;

- синтез и настройка систем управления тягой и торможением подвижного состава для обеспечения требуемого режима движения, соблюдения расписания и правил безопасности;

- исследование влияния различных факторов, таких как ветер, температура, влажность, осадки, снег, лед, песок, грязь и другие, на характеристики подвижного состава и пути;

- моделирование и прогнозирование аварийных ситуаций, таких как столкновения, сходы, заносы, проскальзывания, буксирование, замерзания и другие, а также разработка мер по их предотвращению и ликвидации.

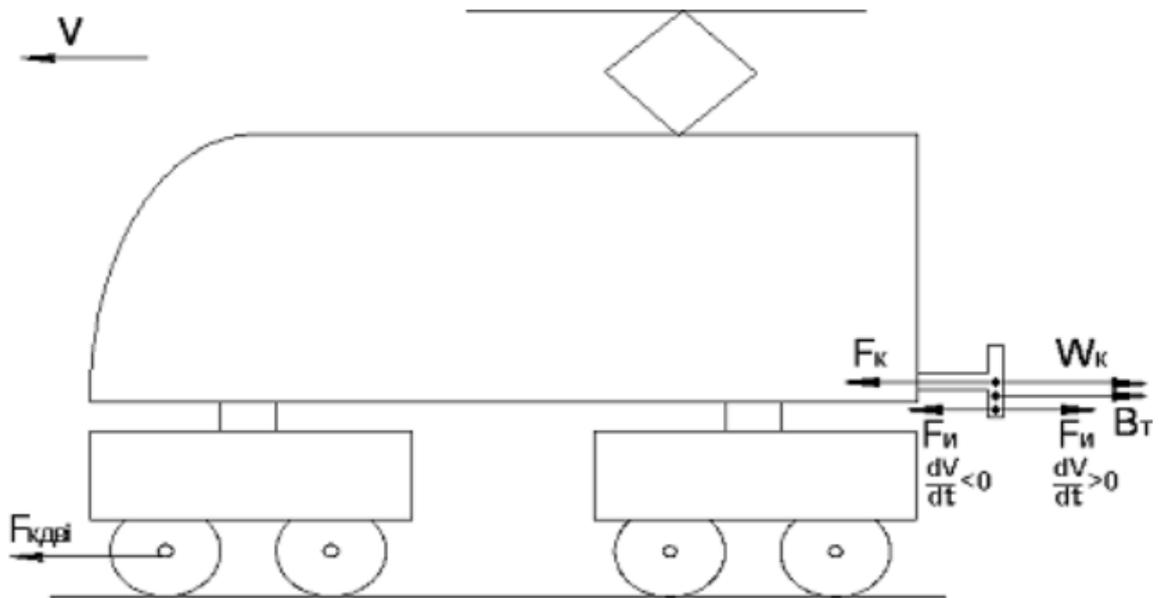
Для построения математической модели железнодорожного подвижного состава необходимо учитывать следующие аспекты:

- геометрические и механические характеристики подвижного состава и пути, такие как длина, масса, жесткость, демпфирование, радиус кривизны, уклон, ширина колеи и другие;

- силы и моменты, действующие на подвижной состав и путь, такие как тяговая сила, тормозная сила, сила сопротивления движению, сила тяжести, центробежная сила, сила Кориолиса, сила ветра и другие (рис.1);

- кинематические и динамические связи между элементами подвижного состава и пути, такие как сцепление, буферное устройство, подвеска, тележка, колесная пара, рельс и другие;

- граничные и начальные условия, такие как положение, скорость, ускорение, угол поворота, угол наклона, угол крена и другие;



- режимы и параметры движения подвижного состава, такие как скорость, ускорение, торможение, расстояние, время, маршрут, расписание и другие.

Рис.1 Силы, действующие на железнодорожный подвижной состав

Математическая модель железнодорожного подвижного состава может быть построена на различных уровнях сложности, в зависимости от целей исследования и доступности исходных данных. В общем случае, модель состоит из трех основных блоков: модели локомотива, модели вагона и модели железнодорожного пути. Каждый блок может быть представлен в виде системы дифференциальных уравнений, связывающих переменные состояния (координаты, скорости, ускорения, силы, моменты и т.д.) и управляющие воздействия (тяговая сила, тормозная сила, сила сопротивления движению и т.д.).

Все внешние силы поезда суммируются и могут быть заменены одной силой  $F$ , называемой равнодействующей

$$F = F_k - B_k - L_T \quad (1.1)$$

Три режима ведения поезда, в том числе грузового состава, которые применяются при любом движении:

а) режим тяги:

$$F_T = F_k - W_k \quad (1.2)$$

б) режим выбега:

$$F_B = -W_k \quad (1.3)$$

в) режим торможения:

$$F_{\text{тор}} = -W_k - B_T \quad (1.4)$$

Модель локомотива описывает динамику локомотива как твердого тела, имеющего шесть степеней свободы: три перемещения и три поворота относительно центра масс. Модель учитывает массу, моменты инерции, геометрические размеры, жесткость и демпфирование подвески, а также характеристики тягового привода и тормозной системы локомотива. Модель также учитывает взаимодействие локомотива с вагонами через сцепное устройство и с железнодорожным путем через колеса и рельсы<sup>5</sup>.

Модель вагона описывает динамику вагона как твердого тела, имеющего пять степеней свободы: два перемещения и три поворота относительно центра масс. Модель учитывает массу, моменты инерции, геометрические размеры, жесткость и демпфирование подвески, а также характеристики тормозной системы вагона. Модель также учитывает взаимодействие вагона с локомотивом и другими вагонами через сцепное устройство и с железнодорожным путем через колеса и рельсы.

Модель железнодорожного пути описывает динамику пути как упругой балки, имеющей две степени свободы: вертикальное и горизонтальное перемещение. Модель учитывает массу, жесткость, демпфирование и геометрические параметры пути, а также влияние подрельсового основания и грунта. Модель также учитывает взаимодействие пути с подвижным составом через контактные силы и моменты, возникающие в точках касания колес и рельс.

Связь между блоками модели осуществляется через граничные условия, которые выражают равенство перемещений, скоростей, ускорений, сил и моментов в точках сопряжения. Например, для связи между локомотивом и вагоном необходимо учитывать перемещения и силы в сцепном устройстве, а для связи между локомотивом и путем необходимо учитывать перемещения и силы в колесах и рельсах. Для решения системы уравнений модели можно использовать различные численные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод Рунге-Кутты и т.д.

В тяговых расчетах для упрощения движения поезда рассматривается как движение единого целого вдоль пути, пренебрегая колебаниями подвижного состава в вертикальном и поперечном направлениях, изменениями расстояния между вагонами и т. д. Эти упрощения позволяют рассматривать движение поезда как поступательное движение твердого тела вдоль пути с одной степенью свободы. Тогда физическая модель поезда может быть представлена как материальная точка, в которой сосредоточена масса всего поезда и к которой приложена равнодействующая всех сил, действующих на поезд. Расположение центра тяжести поезда принято в середине длины поезда. Из теоретической механики известно, что движение материальной точки с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

Рассмотрим режим тяги, в котором сила тяги  $F_k$  преодолевает силу сопротивления движению  $W_k$  и силу инерции  $F_i$

$$F_k = W_k + F_i \quad (2.1)$$

С учетом всех сил, получаем:

$$\xi * F = (1 + \gamma) * m * \frac{dV}{dt} \quad (2.2)$$

– это и есть основное уравнение движения поезда.

Математические соотношения, полностью характеризующие процесс движения поезда и являющиеся его математической моделью:

а) допущения:

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

- поезд является материальной точкой;
- напряжения на ТЭД и диаметры бандажей колесных пар локомотива неизменны и равны своим номинальным значениям;

б) уравнения:

$$\frac{dV}{dt} = 120 * f \quad (2.3)$$

$$\frac{dV}{dS} = 120 * f \quad (2.4)$$

где  $f$  – удельная равнодействующая сила поезда, Н/кН.

В общем случае:

$$f = f_k - w_k - k_T * b_T \quad (2.4)$$

где  $k_T$  – коэффициент реализации тормозной силы.

В режиме тяги:

$$f = f_T - w_i \quad (2.5)$$

$$f_T = f_k - w_o \quad (2.6)$$

В режиме выбега:

$$f = f_b - w_i \quad (2.7)$$

$$f_T = - w_{ox} \quad (2.8)$$

В режиме механического торможения:

– экстренного:

$$f = f_{мтэ} - w_i \quad (2.9)$$

$$f_{мтэ} = -b_T - w_{ox} \quad (2.10)$$

– служебного:

$$f = f_{мтсл} - w_i \quad (2.11)$$

$$f_{мтсл} = -0,5 b_T - w_{ox} \quad (2.12)$$

в) начальные условия:

$$t_o, V_o, S_o$$

г) ограничения:

$$V_o = \min \begin{cases} V_{доп} \\ V_{кл} \\ V_{кв} \end{cases}$$

Соотношения, а), б), в) и г) – это и есть математическая модель процесса движения грузового поезда.

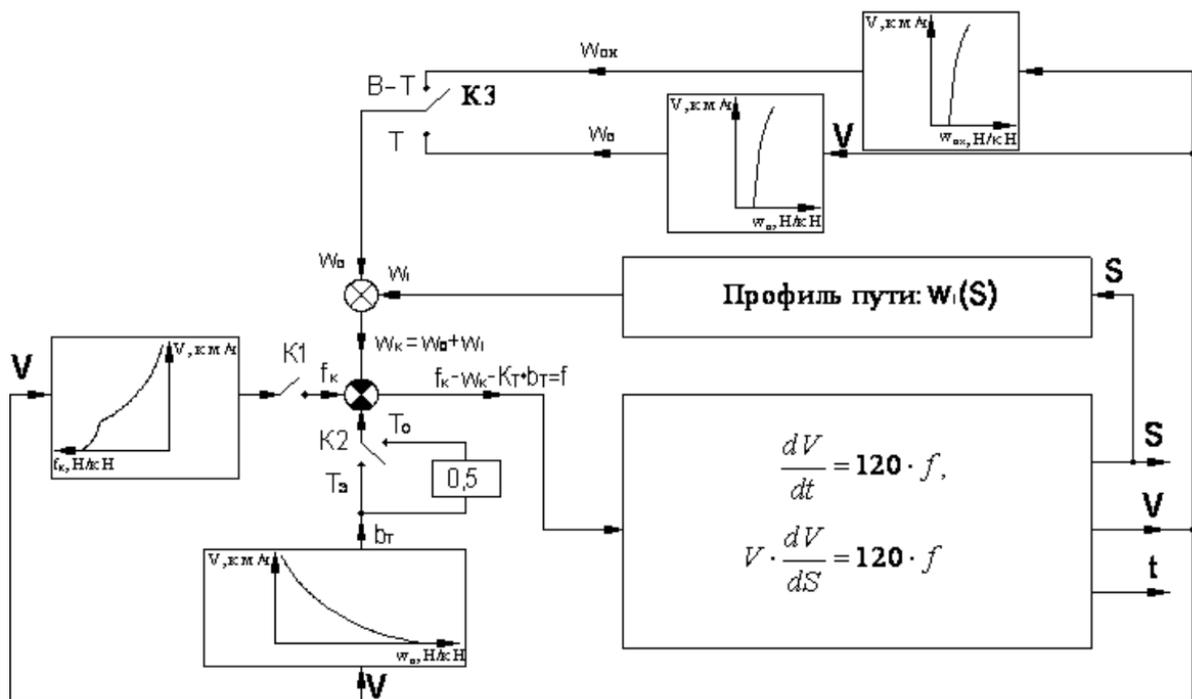


Рис.2 Блок-схема вычисления основного уравнения движения поезда

Математическая модель подвижного состава имеет множество задач, связанных с анализом, оптимизацией, разработкой, тестированием и обучением в области железнодорожного транспорта. Некоторые из этих задач можно перечислить следующим образом:

- Анализ динамических качеств подвижного состава, таких как устойчивость, комфорт, безопасность, эффективность использования энергии и износ. Для этого используются различные критерии и показатели, такие как силы, деформации, напряжения, колебания, ускорения, скорости, температуры и другие. Математическая модель позволяет оценить влияние различных параметров подвижного состава, пути, режимов движения и внешних факторов

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

на эти критерии и показатели, а также определить оптимальные значения этих параметров для достижения желаемых динамических качеств;

- Разработка новых видов подвижного состава, таких как скоростные поезда, метро, трамваи и другие. Для этого используются различные концепции и принципы, такие как аэродинамика, гибридизация, автоматизация, интеллектуализация и другие. Математическая модель позволяет проектировать и сравнивать различные варианты конструкций, систем и устройств подвижного состава, а также оценивать их эффективность, надежность, экономичность и экологичность;

- Тестирование подвижного состава на стендах, полигонах и в натуральных условиях. Для этого используются различные методы и средства, такие как датчики, измерители, регистраторы, компьютеры и другие. Математическая модель позволяет моделировать и симулировать различные режимы и ситуации движения подвижного состава, а также сравнивать и согласовывать экспериментальные и теоретические данные, выявлять и устранять ошибки и несоответствия;

- Обучение и повышение квалификации специалистов в области железнодорожного транспорта, таких как машинисты, диспетчеры, инженеры и другие. Для этого используются различные формы и методы, такие как лекции, семинары, практикумы, тренажеры, компьютерные игры и другие. Математическая модель позволяет демонстрировать и объяснять различные явления и закономерности, связанные с динамикой подвижного состава, а также развивать и проверять знания, умения и навыки, необходимые для работы с подвижным составом.

Особое внимание уделяется математическому анализу, ведь именно на основе его строится математическая модель.

Математический анализ железнодорожного подвижного состава - это раздел прикладной математики, который изучает свойства и поведение подвижного состава на железнодорожных путях. Особенности этого анализа заключаются в следующем:

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

- Подвижной состав представляет собой сложную механическую систему, состоящую из множества тел, связанных между собой различными видами соединений (например, буферы, сцепки, тормозные устройства и т.д.);

- Подвижной состав взаимодействует с железнодорожным путем, который также является динамической системой, подверженной воздействию различных факторов (например, неровности, износ, температура и т.д.);

- Подвижной состав и железнодорожный путь образуют совместную систему, которая подчиняется законам механики, электричества, теплоты и других физических явлений;

- Математический анализ подвижного состава и железнодорожного пути требует применения различных методов и моделей, таких как дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, матричные уравнения, вероятностные уравнения, статистические уравнения и т.д.;

- Математический анализ подвижного состава и железнодорожного пути имеет важное практическое значение для обеспечения безопасности, эффективности и экономичности железнодорожных перевозок.

Таким образом, математическая модель железнодорожного подвижного состава имеет широкий спектр задач, которые способствуют развитию и совершенствованию железнодорожного транспорта. Для решения этих задач необходимо использовать различные методы и инструменты, такие как аналитические, численные, графические, экспериментальные и другие.

Общая схема построения математической модели железнодорожного подвижного состава, состоящей из трех основных блоков: модели локомотива, модели вагона и модели железнодорожного пути. Математическая модель позволяет проводить анализ и оптимизацию параметров подвижного состава, а также прогнозировать его работоспособность и безопасность. Математическая модель может быть построена на различных уровнях сложности, в зависимости от целей исследования и доступности исходных данных. Также они помогают анализировать и оптимизировать различные аспекты динамики подвижного состава, такие как устойчивость, комфорт, безопасность, энергоэффективность

## Международный журнал прикладных наук и технологий Integral

и износ. Данный вид моделей также помогают разрабатывать и тестировать новые виды подвижного состава, такие как скоростные поезда, метро, трамваи и др.

### Литература

1. Антонов, А. А. Методы математического моделирования в технике: учебник для вузов / А. А. Антонов. – М.: Высшая школа, 2017. – С. 328 ;
2. Еремин, М. М. Математические модели функционирования и развития железнодорожного транспорта / М. М. Еремин, А. С. Капустина // Научная и прикладная информатика. – 2018. – № 3. – С. 61-65;
3. Исмаилов, И. Д. Методы расчета коэффициента массы безоткатного устройства силового груза поезда / И. Д. Исмаилов, В. В. Поздняков, К. С. Трофимов // Тягово-разъёмные и погрузочно-разгрузочные машины. – 2019. – № 7. – С. 87-91;
4. Лукьянцев, С. В. Цифровые технологии в транспортных системах: учебник / С. В. Лукьянцев, Т. М. Горобина. – М.: Юрайт, 2020. – С. 264;
5. Никольский, А. П. Математическое моделирование движения грузовых поездов с учетом динамики составов / А. П. Никольский, В. В. Сердюков // Вестник Донской железной дороги. – 2017. – № 4. – С. 56-60;
6. Ожередов, М. К. Математическое моделирование способа регулирования состава силовых грузов грузового поезда / М. К. Ожередов, А. П. Скрылев // Научнопрактический журнал "Транспорт и технология ремонта". – 2016. – № 1. – С. 85-89.

### Literature

1. Antonov, A. A. Methods of mathematical modeling in engineering: textbook for universities / A. A. Antonov. - Moscow: Higher School, 2017. - P. 328;
2. Eremin, M. M. Mathematical models of functioning and development of railway transport / M. M. Eremin, A. S. Kapustina // Scientific and Applied Informatics. - 2018. - № 3. - P. 61-65;
3. Ismailov, I. D. Calculation methods of the mass coefficient of the recoilless device of the train power load / I. D. Ismailov, V. V. Pozdnyakov, K. S.

- Trofimov // Tractor-trailer and loading and unloading machines. - 2019. - № 7. - P. 87-91;
4. Lukyantsev, S. V. Digital technologies in transportation systems: textbook / S. V. Lukyantsev, T. M. Gorobina. - Moscow: Yurait, 2020. - P. 264;
  5. Nikolskiy, A. P. Mathematical modeling of freight trains movement taking into account the dynamics of trains / A. P. Nikolskiy, V. V. Serdyukov // Vestnik of Don Railway. - 2017. - № 4. - P. 56-60;
  6. Ozheredov, M. K. Mathematical modeling of the way of regulation of the power cargo composition of a freight train / M. K. Ozheredov, A. P. Skrylev // Scientific and Practical Journal "Transport and Repair Technology". - 2016. - № 1. - P. 85-89.

*© Черняева Т.Н., Кудашева Л.А., 2024 Международный журнал прикладных наук и технологий Integral №1/2024*

**Для цитирования:** Черняева Т.Н., Кудашева Л.А. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА (ГРУЗОВОЙ ПОЕЗД) // Международный журнал прикладных наук и технологий Integral №1/2024