Научная статья

Original article

УДК 517.999

doi: 10.55186/2413046X_2022_7_12_747

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Пушкарев Герман Артурович, канд. ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, E-mail: gpushkariev@mail.ru

Воробьева Елена Юрьевна, ст. преподаватель кафедры прикладной математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, E-mail: lena-vorobey@yandex.ru

Соколов Владимир Александрович, канд. ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, E-mail: sokolov.pstu@gmail.com

Pushkarev German Arturovich, associate professor of the department of applied mathematics, Perm national research polytechnic university, gpushkariev@mail.ru

Vorobyova Elena Urevna, senior lecturer department of applied mathematics, Perm national research polytechnic university, E-mail: lena-vorobey@yandex.ru

Sokolov Vladimir Alexandrovich, associate professor of the department of applied mathematics, Perm national research polytechnic university, sokolov.pstu@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для системы двух квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений четвертого порядка. На основе схемы «квазилинеаризации» задача сводится к эквивалентной системе уравнений с изотонными операторами. Установлен признак существования решения нелинейной краевой задачи.

Abstract. The article considers a boundary value problem for a system of two quasi-linear functional differential equations of the fourth order. Based on the "quasi-linearization" scheme, the problem is reduced to an equivalent system of equations with isotonic operators. A sign of the existence of a solution to a nonlinear boundary value problem is established.
Ключевые слова: система функционально-дифференциальных уравнений, краевая задача**,** линейный ограниченный оператор, метод монотонных операторов
Keywords: system of functional differential equations, boundary value problem, linear bounded operator, method of monotone operators

Рассмотрим краевую задачу для системы квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений (1а)

$$(\Lambda x_1)(t) = f_1\left(t, \int_0^1 x_1(s)d_sR_0^{11}(t,s), \int_0^1 x_2(s)d_sR_0^{12}(t,s)\right), \quad t\in[0,1] \qquad (1а)$$

$$(\Lambda x_2)(t) = f_2\left(t, \int_0^1 x_1(s)d_sR_0^{12}(t,s), \int_0^1 x_2(s)d_sR_0^{12}(t,s)\right), \quad t\in[0,1] \qquad (1б)$$

$$\begin{array}{ll} x_1(0)=\alpha_{01}, \quad x_1'(0)=\alpha_{11}, \quad x_1(1)=\beta_{01}, \quad x_1'(1)=\beta_{11} \qquad (2a) \\ x_2(0)=\alpha_{02}, \quad x_2'(0)=\alpha_{12}, \quad x_2(1)=\beta_{02}, \quad x_2'(1)=\beta_{12} \qquad (2б) \end{array} \qquad (2)$$

в следующих предположениях: операторы $\Lambda_l : W^4 \to L$ определены равенствами

$$(\Lambda_l x_l)(t) = x_l^{IV}(t) + \int_0^1 x(s)d_sR_1^l(t,s), \quad l=1,2, \qquad (3),$$

где: функции $R_1^l:[0,1]\times[0,1]\to R$ измеримы в квадрате $[0,1]\times[0,1]$; полная вариация $\underset{s=a}{\overset{h}{V}} R_1^l(t,s)$ суммируема на $[0,1]$; $R_0^{lm}:[0,1]\times[0,1]\to R$ измеримы в квадрате $[0,1]\times[0,1]$; полная вариация $\underset{s=a}{\overset{h}{V}} R_0^{lm}(t,s)$ суммируема на $[0,1]$; $R_0^{lm}(t,s)$ не убывают по s при почти всех $t\in[0,1]$; функции $f_l:[0,1]\times R\times R\to R$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

$f_l(t,u_1,u_2)$ измеримы по t при всех $u=(u_1,u_2)\in R\times R$ и непрерывны по $u=(u_1,u_2)\in R\times R$ при почти всех $t\in[0,1]$.

При указанных предположениях операторы Λ_l, определяемые равенствами (3), непрерывно действуют из пространства Соболева $W^4_{[0,1]}$ функций с абсолютно непрерывной производной третьего порядка в пространство суммируемых функций $L([0,1])$. Поэтому под решением системы краевой задачи (1а,б)-(2а,б) будем понимать такую пару $(x_1,x_2)\in W^4\times W^4$, для которой равенства (1а,б) выполняются почти всюду (далее «п.в.») на $[0,1]$.

Изучение краевой задачи (1а,б)-(2а,б) проведем на основе схемы «L_1,L_2-квазилинеаризации», приведенной в работах [1], [2], [4]. Эта схема позволяет редуцировать задачу (1а,б)-(2а,б) к эквивалентной системе уравнений с изотонными операторами и в дальнейшем использовать следующее утверждение Тарского-Биркгофа-Канторовича [1].

<u>Утверждение 1.</u> [1],[3]. Пусть оператор $A=(A_1,A_2)$, где $\begin{cases}A_1: C\to C\\ A_2: C\to C\end{cases}$ изотонные, вполне непрерывные и существуют такие функции $v_1,z_1\in C,\ \ v_2,z_2\in C$, что $\left.\begin{matrix}v_1\le z_1\\ v_2\le z_2\end{matrix}\right\}$ и выполняются неравенства $\left.\begin{matrix}v_1\le A_1v_1\\ v_2\le A_2v_2\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}z_1\ge A_1z_1\\ z_2\ge A_2z_2\end{matrix}\right\}$ и последовательные приближения $\{x_i\}$, $x_{i+1}=Ax_i,\ i=1,2,\dots$, начатые с $x_0=v$ и $x_0=z$, сходятся соответственно к «нижнему» $\underline{x}$ и к «верхнему» $\bar{x}$ решениям уравнения $x=Ax$, и эти решения таковы, что для любого решения $x\in[v,z]$ имеют место неравенства $v_1\le\underline{x}_1\le x_1\le\bar{x}_1\le z_1$, $v_2\le\underline{x}_2\le x_2\le\bar{x}_2\le z_2$.

Пусть $[\bar{v},\bar{z}]$ - некоторый порядковый интервал в пространстве L.

$v=\{v_1,v_2\},\quad z=\{z_1,z_2\}$, $x_0=\{x_{01},x_{02}\},\quad \bar{x}=\{\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$, $\underline{x}=\{\underline{x}_1,\underline{x}_2\},\quad x=\{x_1,x_2\}$.

Будем говорить [1], что функция $f(t,u)=\{f_1(t,u_1,u_2),f_2(t,u_1,u_2)\}$ удовлетворяет условию $L_1[\bar{v},\bar{z}]$, если существует такая суммируемая на $[0,1]$ функция $p_1(t)=\{p_{11}(t),p_{12}(t)\}$ и такой оператор $M_1[\bar{v},\bar{z}]\to L$, что

$$f_1(t,u_1(t),u_2(t)) = p_{11}(t)u_1(t) + M_{11}(t,u_1(t),u_2(t))$$

$$f_2(t,u_1(t),u_2(t)) = p_{12}(t)u_1(t) + M_{12}(t,u_1(t),u_2(t))$$ при $u \in [\bar{v}, \bar{z}]$,

где оператор $M_{11}[\bar{v},\bar{z}] \to L$, изотонный по 1-й переменной (при любой фиксированной 2-й переменной), а оператор $M_{12}[\bar{v},\bar{z}] \to L$, изотонный по 2-й переменной (при любой фиксированной 1-й переменной).

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) существует такая пара функций $v, z \in W^4$, что $v(t) \le z(t), \quad t \in [0,1]$, $v = \{v_1, v_2\}, \quad z = \{z_1, z_2\}$ и выполняются неравенства

$$(\Lambda v_1)(t) \le f_1\left(t, \int_0^1 v_1(s) d_s R_0^{11}(t,s), \int_0^1 v_2(s) d_s R_0^{12}(t,s)\right),$$

$$(\Lambda z_1)(t) \ge f_1\left(t, \int_0^1 z_1(s) d_s R_0^{11}(t,s), \int_0^1 z_2(s) d_s R_0^{12}(t,s)\right) \qquad (4a)$$

$$v_1(0) \le \alpha_{01} \le z_1(0), \quad v_1'(0) \le \alpha_{11} \le z_1'(0),$$
$$v_1(1) \le \beta_{01} \le z_1(1), \quad v_1'(1) \ge \beta_{11} \ge z_1'(1) \qquad (5a)$$

$$(\Lambda v_2)(t) \le f_2\left(t, \int_0^1 v_1(s) d_s R_0^{21}(t,s), \int_0^1 v_2(s) d_s R_0^{22}(t,s)\right),$$

$$(\Lambda z_2)(t) \ge f_2\left(t, \int_0^1 z_1(s) d_s R_0^{21}(t,s), \int_0^1 z_2(s) d_s R_0^{22}(t,s)\right) \qquad (4б)$$

$$v_2(0) \le \alpha_{02} \le z_2(0), \quad v_2'(0) \le \alpha_{12} \le z_2'(0),$$
$$v_2(1) \le \beta_{02} \le z_2(1), \quad v_2'(1) \ge \beta_{12} \ge z_2'(1) \qquad (5б)$$

2) функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию $L_1[\bar{v},\bar{z}]$, с коэффициентом $p_1 \in L$ таким, что вспомогательная краевая задача

$$(\Lambda_1 x_1)(t) \equiv (\Lambda x_1)(t) - p_{11}(t)\int_0^1 x_1(s) d_s R_0^{11}(t,s) = z_1(t), \quad t \in [0,1], \qquad (6а)$$

$$(\Lambda_1 x_2)(t) \equiv (\Lambda x_2)(t) - p_{12}(t)\int_0^1 x_2(s) d_s R_0^{22}(t,s) = z_2(t), \quad t \in [0,1], \qquad (6б)$$

$$x_l(0) = 0 = x_l'(0), \qquad (6a \quad кр)$$
$$x_l(1) = 0 = x_l'(1), \quad l = 1,2 \qquad (6б \quad кр),$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $\left.\begin{matrix} G_{11}(t,s) \geq 0 \\ G_{12}(t,s) \geq 0 \end{matrix}\right\}$ на $[0,1]\times[0,1]$, а решение задачи

$$(\Lambda_1 x_1)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \qquad (7а)$$

$$(\Lambda_2 x_2)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \qquad (7б)$$

$$\begin{matrix} x_l(0) \geq 0, & x_l'(0) \geq 0, \\ x_l(1) \geq 0, & x_l'(1) \leq 0, \end{matrix} \quad \text{где } l = 1,2$$

не принимает отрицательных значений на $[0,1]$. Тогда краевая задача (1а,б), (2) имеет решение $x = \{x_1, x_2\}$, удовлетворяющее неравенствам $v(t) \leq x(t) \leq z(t), \quad t \in [0,1]$.

Доказательство. Используя условие $L_1[\bar{v}, \bar{z}]$, краевую задачу (1а,б), (2) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} (\Lambda_1 x_1)(t) = M_{11}\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) \\ (\Lambda_1 x_2)(t) = M_{12}\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) \end{cases} \qquad (8)$$

и пусть выполнены краевые условия (2). В силу однозначной разрешимости краевой задачи (6а,б), (6а.б кр), задача (8) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} x_1(t) = \int\limits_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \int\limits_0^1 x_1(\tau) d_\tau R_0^{11}(s,\tau), \int\limits_0^1 x_2(\tau) d_\tau R_0^{12}(s,\tau)\right) ds + x_{21}(t) \\ x_2(t) = \int\limits_0^1 G_{12}(t,s) M_{12}\left(s, \int\limits_0^1 x_2(\tau) d_\tau R_0^{21}(s,\tau), x_2(\tau) d_\tau R_0^{22}(s,\tau)\right) ds + x_{22}(t) \end{cases}$$

в пространстве С, где $x_{21}(t)$ и $x_{22}(t)$ - решения краевых задачи

$$\begin{cases} (\Lambda_1 x_1)(t) = 0, \quad t \in [0,1] \\ x_1(0) = \alpha_{01}, \quad x_1'(0) = \alpha_{11}, \\ x_1(1) = \beta_{01}, \quad x_1'(1) = \beta_{11} \end{cases} \quad (2a) \qquad \begin{cases} (\Lambda_1 x_2)(t) = 0, \quad t \in [0,1] \\ x_2(0) = \alpha_{02}, \quad x_2'(0) = \alpha_{12}, \\ x_2(1) = \beta_{02}, \quad x_2'(1) = \beta_{12} \end{cases} \quad (2б)$$

Определим оператор $A : [v, z] \to C$ равенствами

$$\begin{cases} (Ax_1)(t) = \int\limits_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \int\limits_0^1 x_1(\tau) d_\tau R_0(s,\tau)\right) ds + x_{21}(t) \\ (Ax_2)(t) = \int\limits_0^1 G_{12}(t,s) M_{12}\left(s, \int\limits_0^1 x_2(\tau) d_\tau R_0(s,\tau)\right) ds + x_{22}(t) \end{cases}.$$

Оператор А является вполне непрерывным, так как операторы $\begin{cases} G_{11}: L_2 \to C \\ G_{12}: L_2 \to C \end{cases}$,

определяемые равенствами $\begin{cases} (G_{11}y_1)(t) = \int_0^1 G_{11}(t,s)y_1(s)ds \\ (G_{12}y_2)(t) = \int_0^1 G_{12}(t,s)y_2(s)ds \end{cases}$, вполне непрерывны [1];

операторы $\begin{cases} M_{11}: [\bar{v}_1, \bar{z}_1] \to L \\ M_{12}: [\bar{v}_2, \bar{z}_2] \to L \end{cases}$, определяемые равенствами

$$(M_{11}u_1)(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t)) - p_{11}(t)u_1(t)$$

$$(M_{12}u_2)(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t)) - p_{12}(t)u_2(t)$$

непрерывны в силу выполнения условий Каратеодори для функций $f_1(t, u_1(t), u_2(t))$ и $f_2(t, u_1(t), u_2(t))$; а операторы $\begin{cases} T_1: [v_1, z_1] \to [\bar{v}_1, \bar{z}_1] \\ T_2: [v_2, z_2] \to [\bar{v}_2, \bar{z}_2] \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} \bar{v}_1 = T_h v_1 \\ \bar{z}_1 = T_h z_1 \end{cases}$ определяемые

равенствами $\begin{cases} (T_1x_1)(t) = \int_0^1 x_1(s)d_sR_0(t,s) \\ (T_2x_2)(t) = \int_0^1 x_2(s)d_sR_0(t,s) \end{cases}$, ограничены. Операторы A_1, A_2 изотонные,

так как функции Грина положительны в квадрате $[0,1]\times[0,1]$, операторы M_{11}, M_{12} являются изотонными операторами (соответственно по 1-й и по 2-й переменным), а операторы T_1, T_2 - изотонными.

Таким образом, мы провели редукцию задачи (1а,б), (2) к уравнению $x = Ax$, где $A: [v, z] \to C$ - вполне непрерывный изотонный оператор.

Покажем, что из неравенств $\begin{cases} (\Lambda v_1)(t) \le f_1\left(t, \bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t)\right) & (4a) \\ v_1(0) \le \alpha_{01}, \quad v_1'(0) \le \alpha_{11}, & \\ v_1(1) \le \beta_{01}, \quad v_1'(1) \ge \beta_{11} & (5a) \end{cases}$ следует выполнение

неравенства $v_1 \le A_1v_1$, а из неравенств $\begin{cases} (\Lambda v_2)(t) \le f_2\left(t, \bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t)\right) & (4б) \\ v_2(0) \le \alpha_{02}, \quad v_2'(0) \le \alpha_{12}, & \\ v_2(1) \le \beta_{02}, \quad v_2'(1) \ge \beta_{12} & (5б) \end{cases}$ следует

выполнение неравенства $v_2 \le A_2v_2$.

Действительно, из неравенства (4а) имеем $(\Lambda_1v_1)(t) \le M_{11}(t, \bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t))$.

В силу однозначной разрешимости задачи (6а), (6а,б кр) и положительности функции Грина $G_{11}(t,s)$ в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ получим неравенство

$$v_1(t) \le \int_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \bar{v}_1(s), \bar{v}_2(s)\right) ds + v_{21}(t), \qquad (9)$$

где $v_{21}(t)$ - решение краевой задачи

$$(\Lambda_1 v_1)(t) = 0, \quad t \in [0,1],$$
$$v_1(0) \le \alpha_{01}, \quad v_1'(0) \le \alpha_{11}$$
$$v_1(1) \le \beta_{01}, \quad v_1'(1) \ge \beta_{11}.$$

Введем обозначение: $y_1(t) = x_{21}(t) - v_{21}(t)$. Несложно заметить, что $y_1(t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$(\Lambda_1 y)(t) = 0, \quad t \in [0,1],$$
$$y(0) \ge 0, \quad y'(0) \ge 0,$$
$$y(1) \ge 0, \quad y'(1) \le 0.$$

Так как решение задачи (7а) по условию не принимает отрицательных значений на $[0,1]$, то получим $y_1(t) \ge 0$ на $[0,1]$, т. е. $x_{21}(t) \ge v_{21}(t)$. Отсюда и из неравенств (9) имеем $v_1(t) \le \int_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \bar{v}_1(s), \bar{v}_2(s)\right) ds + x_{21}(t)$ или $v_1 \le A_1 v_1$.

Совершенно аналогично доказывается и неравенство $v_2 \le A_2 v_2$.

Аналогично можно показать, что из неравенств

$$\begin{cases} (\Lambda z_1)(t) \le f_1\left(t, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)\right) & (4a) \\ \alpha_{01} \le z_1(0), \quad \alpha_{11} \le z_1'(0), & \\ \beta_{01} \le z_1(1), \quad \beta_{11} \ge z_1'(1) & (5a) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (\Lambda z_2)(t) \ge f_2\left(t, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)\right) & (4б) \\ \alpha_{02} \le z_2(0), \quad \alpha_{12} \le z_2'(0), & \\ \beta_{02} \le z_2(1), \quad \beta_{12} \ge z_2'(1) & (5б) \end{cases}$$

следует выполнение неравенства $z \ge Az$.

Действительно, из неравенства (4а) имеем $(\Lambda_1 z_1)(t) \ge M_{11}(t, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))$.

В силу однозначной разрешимости задачи (6а), (6а,б кр) и положительности функции Грина $G_{11}(t,s)$ в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ получим неравенство

$$z_1(t) \ge \int_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)\right) ds + z_{21}(t), \qquad (10)$$

где $z_{21}(t)$ - решение краевой задачи

$$(\Lambda_1 z_1)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \qquad \begin{array}{l} \alpha_{01} \le z_1(0), \quad \alpha_{11} \le z_1'(0), \\ \beta_{01} \le z_1(1), \quad \beta_{11} \ge z_1'(1). \end{array}$$

Введем обозначение: $\tilde{y}_1(t) = z_{21}(t) - x_{21}(t)$. Несложно заметить, что $\tilde{y}_1(t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$(\Lambda_1 y)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \begin{matrix} y(0) \geq 0, & y'(0) \geq 0, \\ y(1) \geq 0, & y'(1) \leq 0. \end{matrix}$$

Так как решение задачи (7a) по условию не принимает отрицательных значений на $[0,1]$, то получим $\tilde{y}_1(t) \geq 0$ на $[0,1]$, т. е. $x_{21}(t) \leq z_{21}(t)$. Отсюда и из неравенства (10) имеем

$$z_1(t) \leq \int_0^1 G_{11}(t,s) M_{11}\left(s, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)\right) ds + x_{21}(t) \text{ или } z_1 \geq (Az_1)(t).$$

Совершенно аналогично доказывается и неравенство $z_2 \geq (Az_2)(t)$, т. е. неравенство $z \geq Az$ доказано.

Тогда по утверждению 1 имеем: последовательные приближения $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, $x_{i+1} = (x_{i+1,1}; x_{i+1,2}) \equiv Ax_i = (A_1 x_{i1}; A_2 x_{i2}), \quad i = 1,2$, начатые с $x_0 = v$ и $x_0 = z$, сходятся соответственно к «нижнему» $\underline{x}$ и «верхнему» $\bar{x}$ решениям уравнения $x = Ax$, эти решения принадлежат порядковому интервалу $[v, z]$, и для любого решения $x \in [v, z]$ уравнения $x = Ax$ имеют место неравенства $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$.

Что и требовалось доказать.

Список источников

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ., 3-е изд. – М.:Наука, 1984. – 752 с.
2. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., Наука, 1991, - 278 с.
3. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. Абстрактное функционально-дифференциальное уравнение//Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, ППИ, 1987. Т.14, с. 3-11.
4. Г. А. Пушкарев, Е. Ю. Воробьева Разрешимость одной краевой задачи для дифференциального уравнения с отклонением аргумента./ Перспективы науки. Информатика, вычислительная техника и управление. Тамбов. — 2015 .— № 8(71).— С. 74-78.

References

1. Kantorovich L. V., Akilov, G. P. Functional analysis., 3 Izd. - M: Nauka, 1984. - 752 s.
2. Azbelev N. V., Maksimov, B. N., Rakhmatullina L. F. Introduction to the theory of functional differential equations. M., Nauka, 1991, - 278 C.
3. Azbelev N. V., Rakhmatullina L. F. Functional differential equations// Differential equations. 1978. T.14, № 5. C. 771-797.
4. Pushkarev G. A. , Vorobyova E. Yu. Solvability of a boundary value problem for differential th equations with deviation argument./ Prospects of science. Computer science, computer engineering and management. Tambov. — 2015 .— № 8(71).— S. 74-78.

Для цитирования: Пушкарев Г.А., Воробьева Е.Ю., Соколов В.А., Об одной краевой задаче для системы функционально-дифференциальных уравнений // Московский экономический журнал. 2022 . №12. URL: https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-12-2022-50/