Московский экономический журнал. № 5. 2022
Moscow economic journal. № 5. 2022

Научная статья

Original article

УДК: 330.322

doi: 10.55186/2413046X_2022_7_5_278

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ИЗ ТРЕХ ВИДОВ ЦЕННЫХ БУМАГ

FORMATION OF AN OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO OF THREE TYPES OF SECURITIES

Чесноков Евгений Александрович, кандидат физико – математических наук, доцент, Санкт – Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Chesnokov Evgeny Alexandrovich, PhD of Physico – mathematical Sciences, Associate Professor, St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

E-mail: eachesn@yandex.ru

Аннотация. В рамках инвестиционной модели Тобина получено точное аналитическое решение задачи формирования оптимального портфеля из трех видов ценных бумаг, одна из которых представляет собой безрисковый актив с фиксированным уровнем доходности. Показано, что не всегда оптимальное решение представляет собой распределение средств между безрисковым активом и касательным портфелем. Подробно рассмотрены все возможные случаи формирования оптимального портфеля.

Abstract. Within the framework of Tobin's investment model, an exact analytical solution to the problem of forming an optimal investment portfolio of three types of securities, one of which is a risk-free asset with a fixed level of return, has been obtained. It is shown that the optimal solution is not always a distribution of funds

between a risk-free asset and a tangent portfolio. All possible cases of optimal portfolio formation are considered in detail.
Ключевые слова: инвестиционный портфель, касательный портфель, модель Тобина

Keywords: investment portfolio, tangent portfolio, Tobin model

Вопрос о выборе оптимальной стратегии инвестирования денежных средств в финансовые активы с целью получения дополнительного дохода на протяжении многих лет был и продолжает оставаться актуальным в настоящее время. Впервые систематическое исследование вопроса о распределении инвестиций между акциями различных компаний было проведено, по-видимому, в начале пятидесятых годов Г. Марковицем [1]. Само распределение инвестируемых средств в долях x_i между различными ценными бумагами, удовлетворяющее очевидному уравнению полноты распределения

$$\sum_i x_i = 1, \tag{1}$$

получило название формирования портфеля ценных бумаг, а теория выбора оптимального с точки зрения инвестора портфеля – портфельной теории.

Г. Марковицем было введено понятие эффективного множества портфелей – портфелей, обеспечивающих для инвестора минимальный риск при заданном уровне доходности. Основываясь на математической статистике, Г. Марковиц предложил в качестве оценки уровня доходности ценных бумаг использовать среднее статистическое значение по некоторому временному интервалу, а в качестве оценки риска – среднее квадратическое отклонение доходности. В общем виде была проанализирована задача нахождения портфеля, обеспечивающего минимальный риск при заданном среднем уровне доходности.

Несколько позже, Дж. Тобин обобщил модель Г. Марковица, включив в портфель безрисковый актив (актив с фиксированным уровнем доходности)

[2]. К таким активам можно отнести облигации государственного займа, облигации крупных, надежных компаний, сберегательные вклады в надежных банках. Им же было введено понятие касательного портфеля как оптимального рискового актива, сформированного из взятых в определенном соотношении рисковых ценных бумаг различных видов и от различных компаний. Было показано, что все инвестируемые средства следует распределять между инвестициями в безрисковый актив и инвестициями в касательный портфель в пропорции, определяемой исключительно предпочтениями инвестора (желаемым уровнем доходности и готовностью к риску).

С развитием компьютерных технологий, при не слишком большом числе включаемых в рассмотрение ценных бумаг, решение задачи нахождения касательного портфеля стало практически осуществимым с использованием методов численной оптимизации. Простейшие варианты могут быть рассмотрены, например, в Excel с использованием пакета «Поиск решения». В то же время, как это обычно бывает, привлечение численных методов решения задачи оптимизации делает процесс отыскания решения ненаглядным, возникает вопрос о точности найденного решения, о его устойчивости (степени изменчивости решения по отношению к включению в рассмотрение новых возможных объектов для инвестирования или к изменению конъюнктуры рынка).

В настоящей работе рассматривается модель формирования портфеля из трех видов ценных бумаг, две из которых представляют собой активы разной степени риска и ожидаемой доходности, третья же является безрисковым активом фиксированного уровня доходности. Актуальность данной модели обусловлена двумя обстоятельствами. С одной стороны, модель допускает полностью аналитическое решение, имеющее геометрическую наглядность и ясность интерпретации. С другой стороны, модель представляет собой и непосредственный практический интерес,

например, в вопросе формирования оптимального портфеля при инвестициях в паевые инвестиционные фонды (ПИФы): ПИФ акций, ПИФ облигаций и денежный (практически безрисковый) ПИФ [3].

Задача формирования портфеля из двух рисковых активов и одного актива с фиксированным уровнем доходности формулируется следующим образом.

Имеется возможность инвестирования денежных средств в два рисковых актива со средним уровнем доходности y_1,y_2, рисками σ_1,σ_2 и ковариацией доходностей σ_{12}. Значения перечисленных параметров можно оценить методами математической статистики, основываясь на анализе временных рядов доходностей ценных бумаг за некоторый предшествующий промежуток времени. Имеется также возможность инвестирования в безрисковый актив с известным уровнем доходности y_f. Требуется сформировать портфель из трех ценных бумаг

$$x_0 + X_1 + X_2 = 1, \tag{2}$$

обеспечивающий инвестору минимальный риск σ при заданном среднем уровне доходности y. Здесь X_1,X_2,x_0 - доли денежных средств, инвестируемых соответственно в первый, второй и нулевой (безрисковый) активы.

Для начала, определим эффективное множество портфелей, составленных из двух рисковых активов. Средняя ожидаемая доходность любого такого портфеля задается уравнением

$$y = xy_1 + (1 - x)y_2, \tag{3}$$

где x_1=x - доля инвестиций в первую ценную бумагу, x_2=1-x - доля инвестиций во вторую ценную бумагу.

Квадрат среднего квадратического отклонения доходности или квадрат риска портфеля определяется выражением

$$\sigma^2 = x^2\sigma_1^2 + (1 - x)^2\sigma_2^2 + 2x(1 - x)\sigma_{12}. \tag{4}$$

Решая систему уравнений (3), (4) и, исключая из рассмотрения переменную x, приходим к следующему уравнению связи риска и ожидаемой доходности для произвольного портфеля

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

где параметры y_0, a и b следующим образом выражаются через исходные параметры задачи:

$$y_0 = \frac{y_1\sigma_2^2 + y_2\sigma_1^2 - (y_1+y_2)\sigma_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}, \tag{6}$$

$$a = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}}, \tag{7}$$

$$b = \frac{(y_1-y_2)\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}. \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем, для определенности, под первой бумагой будем понимать объект для инвестирования с большим риском и большим уровнем ожидаемой доходности ($y_1>y_2$, $\sigma_1> \sigma_2$).

Уравнение (5) задает гиперболу на плоскости (σ,y) с осью симметрии $y=y_0$. Эффективное множество портфелей, составленных из первой и второй ценных бумаг, представляет собой часть гиперболы, заключенную между точками 1 и 2, для которой выполняется ограничение $0 \le x \le 1$.

Далее, определим касательный портфель (σ_M,y_M), возникающий при учете возможности инвестирования средств в безрисковый актив с доходностью y_f. В рассматриваемой модели поиск касательного портфеля представляет собой нахождение точки касания гиперболы и прямой, проходящей через точку с координатами (0,y_f).

Условие касания записывается как равенство углов наклона касательной к гиперболе и прямой, проходящей через точки (0,y_f) и (σ_M,y_M)

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{y-y_f}{\sigma}. \tag{9}$$

Решая систему уравнений (5) и (9), приходим к следующему выражению для средней ожидаемой доходности касательного портфеля

$$y_M = y_0 + \frac{b^2}{y_0 - y_f}. \qquad (10)$$

Подставляя в уравнение (10) значения y_0 и b из формул (6) и (8) и вводя новые переменные $Y=y-y_f$, приходим к следующему выражению

$$y_M = \frac{Y_1\sigma_2^2 - Y_2\sigma_{12}}{Y_1\sigma_2^2 + Y_2\sigma_1^2 - (Y_1+Y_2)\sigma_{12}} \cdot y_1 + \frac{Y_2\sigma_1^2 - Y_1\sigma_{12}}{Y_1\sigma_2^2 + Y_2\sigma_1^2 - (Y_1+Y_2)\sigma_{12}} \cdot y_2. \qquad (11)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (3), заключаем

$$x_{1M} = x_M = \frac{Y_1\sigma_2^2 - Y_2\sigma_{12}}{Y_1\sigma_2^2 + Y_2\sigma_1^2 - (Y_1+Y_2)\sigma_{12}}. \qquad (12)$$

Риск касательного портфеля σ_M находится непосредственной подстановкой (12) в (4).

В заключении отметим, что в общем случае оптимальный портфель не обязательно представляет собой распределение средств между безрисковым активом и касательным портфелем, как это предполагается в большинстве работ, посвященных модели Тобина (смотри, например, [4,5]). Перечислим три возможных случая формирования оптимального портфеля.

Случай первый: $y_f \geq y_0$ или $x_M \geq 1$. В этом случае инвестирование средств во вторую, менее доходную, бумагу оказывается нецелесообразным. Оптимальный портфель полностью формируется из безрискового актива и первой, наиболее доходной, ценной бумаги. Доли этих бумаг в портфеле, обеспечивающем ожидаемый уровень доходности y, задаются уравнениями

$$X_1 = \frac{y - y_f}{y_1 - y_f}, \qquad x_0 = 1 - X_1. \qquad (13)$$

Второй случай: $y_f < y_0$ и $0 < x_M < 1$. В этом случае, при удовлетворительном для инвестора уровне доходности $y < y_M$, с целью уменьшения риска, портфель следует формировать из трех ценных бумаг. Их доли в оптимальном портфеле задаются уравнениями

$$X = \frac{y - y_f}{y_M - y_f}, \quad x_0 = 1 - X, \quad X_1 = x_M X, \quad X_2 = (1 - x_M)X. \qquad (14)$$

Здесь X - доля средств, инвестируемых в касательный портфель.

Если инвестор предпочитает больший риск для обеспечения более высокого уровня ожидаемой доходности $y>y_M$, то оптимальный портфель должен быть сформирован только из рисковых ценных бумаг

$$x_0 = 0, \quad X_1 = \frac{y-y_2}{y_1-y_2}, \quad X_2 = 1 - X_1. \tag{15}$$

В третьем случае, когда $x_M<0$, также возможны две ситуации. Для уменьшения риска инвестиций до величины $\sigma<\sigma_2$ следует распределить вложения между безрисковым активом и второй (наименее рисковой) ценной бумагой. Доли бумаг в портфеле снова определяются формулами (13), только теперь речь идет о второй ценной бумаге (индекс 1 нужно заменить на индекс 2).

Если же инвестору желательно обеспечить более высокий уровень ожидаемой доходности ($y>y_2$), инвестиции следует полностью распределить между первой и второй ценными бумагами, исключив из рассмотрения малодоходный безрисковый актив. В этом случае доли первой и второй бумаг в оптимальном портфеле вновь определяются по формулам (15).

Список источников

1. *Markowitz H*. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. V.7. N.1. P. 77-91.
2. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // The Review of Economic Studies. 1958. V.25. N.2. P.65-86.
3. Чесноков Е.А. Анализ эффективности управления паевыми инвестиционными фондами с учетом возможности глобального экономического кризиса // Проблемы реформирования экономики России: Сборник научных трудов второй всероссийской научно – практической конференции. - Тверь, 25-26 апреля 2011 г. – Тверь: Изд-во Центра экономических исследований, 2011. - С. 58-61.
4. Мартемьянова К.Д., Невежин В.П. Формирование инвестиционного портфеля методом Дж. Тобина // Хроноэкономика. 2017. N.6(8). С.71-74.

5. Касимов Ю.В., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н. Основы финансовых вычислений. Портфели активов, оптимизация и хеджирование. - М.: КНОРУС, 2017. – 322 с.

References

1. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. V.7. N.1. P. 77-91.

2. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // The Review of Economic Studies. 1958. V.25. N.2. P.65-86.

3. Chesnokov E.A. Analiz effektivnosti upravleniya paevymi investicionnymi fondami s uchetom vozmozhnosti global`nogo ekonomicheskogo krizisa // Problemy reformirovaniya ekonomiki Rossii: Sbornik nauchnyx trudov vtoroj vserossijskoj nauchno – prakticheskoj konferencii. - Tver`, 25-26 aprelya 2011. – Tver`: Izd-vo Centra ekonomicheskix issledovanij, 2011. - P. 58-61.

4. Martem`yanova K.D., Nevezhin V.P. Formirovanie investicionnogo portfelya metodom D. Tobina // Xronoekonomika. 2017. N.6(8). P.71-74.

5. Kasimov Yu.V., Al`-Nator M.S., Kolesnikov A.N. Osnovy finansovyx vychislenij. Portfeli aktivov, optimizaciya i xedzhirovanie. - M.: KNORUS, 2017. – 322 p.

Для цитирования: Чесноков Е.А. Формирование оптимального портфеля из трех видов ценных бумаг // Московский экономический журнал. 2022. № 5. URL: https://qje.su/ekonomicheskaya-teoriya/moskovskij-ekonomicheskij-zhurnal-5-2022-14/

© Чесноков Е.А, 2022. Московский экономический журнал, 2022, № 5.